

Contrôle continu N° 1

(Durée : 1h 30 mn)

Les réponses doivent être concises et précises.

Exercice 1. ( 7 points) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \log(1+t^2) dt.$$

- 1) Justifier l'existence de  $I_n$  et de  $J_n$ .
- 2) Montrer que les suites réelles  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont décroissantes.
- 3) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
- 4) En intégrant par parties  $J_n$  montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$J_n = \frac{\log 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}.$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n J_n)$ .

Exercice 2. ( 7 points) Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}.$$

- 1) (i) Montrer que les intégrales généralisées  $\int_0^1 f(t) dt$  et  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  convergent.  
*Indication : Utiliser des fonctions équivalentes.*  
 (ii) En déduire la nature de l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .
- 2) (i) Montrer que, pour tout  $t > 0$ ,  $1+t \leq e^t$ .  
 (ii) En déduire que, pour tout  $t > 0$ ,  $0 < f(t) \leq t$ .  
 (iii) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt$ .  
 En utilisant 2)(ii), montrer que l'intégrale généralisée  $I_n$  converge.

Exercice 3. ( 6 points) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+nx^2}.$$

- 1) (i) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
- (ii) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et posons,  $g_n = f - f_n$ . Montrer que  $g_n$  est impaire et donner le tableau des variations de  $g_n$  sur  $[0, +\infty[ = \mathbb{R}_+$ .
- (iii) En utilisant 1)(ii), déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .
- 2) En utilisant 1)(iii), déduire que la suite réelle  $\left( \int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et calculer sa limite.





ETU SUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..